Scuola Secondaria di Primo Grado COLOGNA VENETA
CLASSE 3 / A

APPUNTI DI
CALCOLO LETTERALE

prof. *Sergio Bravin*

3. EQUAZIONI

Premessa: **FRASI APERTE**

Problema: Individuare l'alunno della terza A dell'anno 2014 della Scuola Secondaria di Cologna che si chiama Francesco. Come ragioniamo? Innanzi tutto pensiamo al significato di questo problema, cioè qual è la classe terza A; una volta individuata ricerchiamo nell'elenco del registro di classe qual è l’alunno che si chiama Francesco. Una volta individuato la risposta sarà sicura ed unica.

Se la domanda fosse stata, invece, l'alunno di nome Luca con la precedente procedura avremmo ancora la risposta, ma in tal caso più di una, anche se sicuramente esatte.

Se si fosse chiesto l'alunno di nome Antonio? Procedendo come prima la risposta sarebbe ancora possibile: non esistono, nella terza A, alunni di nome Antonio.

Rivedendo con calma, che cosa abbiamo fatto?

È stato posto innanzitutto un problema e per rispondere abbiamo individuato l'insieme nel quale indagare, quello che chiameremo insieme di variabilità, ed essendo conosciuto, l'abbiamo analizzato e limitatamente a questo abbiamo dato le nostre conclusioni. Non ci è minimamente passato per la mente di provare a consultare il registro della prima C o il libro degli animali o la formazione del Milan. Una frase del tipo precedente viene detta frase aperta.

Sono frasi aperte:

1) Il metallo che ha peso specifico 7,8.
2) La città capitale dell'Inghilterra.
3) Il numero il cui doppio vale 6.
4) L'artista che ha cantato la canzone "They dance alone".

Se conosciamo gli insiemi di variabilità si potranno dare sicuramente delle risposte.

In ognuna di tali frasi abbiamo un qualcosa non conosciuto che in matematica viene comunemente detto termine incognito o più brevemente incognita. Tale incognita andrà cercata nell'insieme di variabilità.

L'incognita usualmente viene indicata con una lettera minuscola come x, y, z, ... o qualsiasi altra a piacere (anche se quelle indicate sono le più usate).

Le precedenti frasi aperte potrebbero essere scritte più brevemente :

1) x è il metallo che ha peso specifico 7,8.
2) x è la capitale dell'Inghilterra.
3) x è quel numero il cui doppio vale 6.
4) x è il cantante che ha cantato la canzone "they dance alone".

La frase numero 3) potrebbe essere scritta più sinteticamente:

$$2\,x = 6$$

Analizzando l'insieme dei Reali esiste il numero 3 il cui doppio risulta 6, perciò 3 si dirà soluzione della frase aperta 2 x = 6. Una volta individuato il valore o il nome di tale incognita otterremo, per ciascuna frase L'INSIEME DELLE SOLUZIONI.

Risolvere una frase aperta significa trovare L'INSIEME DELLE SOLUZIONI.

Per le frasi aperte 1), 2), 3), 4), si avrà rispettivamente:

INSIEME DI VARIABILITA`	INSIEME DELLE SOLUZIONI
{ x : x è un metallo }	{ ferro }
{ x : x è una capitale }	{ Londra }
{ x : x appartiene a R }	{ 3 }
{ x : x è un cantante }	{ Sting }

Notare che, in generale, non sempre la soluzione è semplice o immediata. Ciò e dovuto al fatto che non siamo in grado di conoscere tutti gli INSIEMI DI VARIABILITA` (forse non siete stati in grado di calcolare le soluzioni della prima e della quarta frase aperta). In matematica tutte le frasi aperte hanno risposta perché, fortunatamente, esistono dei procedimenti per ottenere L'INSIEME DELLE SOLUZIONI.

Ritornando al problema iniziale scriviamo in questa forma le soluzioni di quelle frasi aperte.

1) x è un alunno della classe 3 A 2013/2014 di nome Francesco.

INSIEME DI VARIABILITA`	INSIEME DELLE SOLUZIONI
{ x : x è alunno della 3 A }	{ Francesco B }

2) x è alunno della classe 3 A di nome Luca.

INSIEME DI VARIABILITA`	INSIEME DELLE SOLUZIONI
{x : x è alunno della 3 A}	{Luca G., Luca Z.}

3) x è un alunno della classe 3 A di nome Antonio.

INSIEME DI VARIABILITA`	INSIEME DELLE SOLUZIONI
{ x : x è alunno della 3 A }	$\emptyset$ (insieme vuoto)

Infine analizziamo una frase di questo tipo:

4) x è un alunno della classe 3 A.

Anche questa è una frase aperta e per trovare le sue soluzioni cominceremmo a leggere i nomi sul registro dal primo all'ultimo. In questo caso si può notare che l'insieme delle soluzioni coincide con l'insieme di variabilità.

INSIEME DI VARIABILITA`	INSIEME DELLE SOLUZIONI
{ x : x è alunno della 3 A }	{ x : x è alunno della 3 A }

Nel caso 3) si dice che la frase aperta <u>non ammette soluzioni nell'insieme di variabilità</u>.
Nel caso 4) si dice che la frase aperta <u>è verificata per ogni elemento dall'insieme di variabilità</u>.

Nel caso specifico delle frasi aperte matematiche (come la precedente: x è quel numero il cui doppio vale 6) è utile trasformare la scrittura dal linguaggio naturale al linguaggio matematico, ovvero in uguaglianze fra espressioni algebriche che potranno essere poi risolte con procedimenti matematici.

ESERCIZI:

Tradurre le seguenti frasi aperte dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico: (senza preoccuparsi minimamente di ciò che può risultare !!!)

esempio svolto: Trova il numero il cui triplo aumentato di 8 è uguale al quadruplo del numero diminuito di 2.

Innanzitutto è fondamentale stabilire qual è l'incognita da determinare: in generale l'incognita è ciò che la frase chiede di determinare, in questo caso il numero. Sarà quindi opportuno indicare il numero con la lettera x. Nel linguaggio simbolico si avrà: (i termini triplo, aumentato, uguale , quadruplo, diminuito dovrebbero ormai avere un significato ben preciso e conosciuto)

$$3x + 8 = 4x - 2$$

1) Determinare un numero sapendo che se dal suo quadruplo si toglie 27 si ottiene il numero stesso.

2) Determinare un numero sapendo che se dal suo doppio si toglie 15 si ottiene 3.

3) Determinare un numero sapendo che il suo triplo diminuito di 11 è uguale a 40.

4) Determinare un numero sapendo che se ai suoi $\frac{2}{3}$ si aggiunge 6 si ottengono i suoi $\frac{4}{5}$.

5) Determinare un numero sapendo che i suoi $\frac{5}{14}$ aumentati di 5 danno i suoi $\frac{2}{7}$ aumentati di 7 .

6) La somma di due numeri successivi è 31.

7) La somma di tre numeri successivi è 78.

8) Il quadrato di un numero aumentato di 9 vale 25 .

EQUAZIONI

Le precedenti frasi aperte erano complete solo se si determinava quel particolare valore o nome che le rendevano vere.

In Matematica le frasi aperte assumono il nome di equazioni e le loro soluzioni dovranno essere ricercate in insiemi numerici come i Naturali (N), Interi (Z), Razionali (Q), Reali (R) e la loro, o le loro, soluzioni apparterranno a questi insiemi. (se non viene specificato si sottintende R)

1) <u>DEFINIZIONE DI EQUAZIONE</u>: Diremo equazione un'uguaglianza fra due espressioni algebriche, nell'incognita fissata (generalmente x), verificata solo per particolari valori attribuiti all'incognita.

es.:

$$2x - 3 = 4x - 6$$

è un'equazione.

<u>NOMENCLATURA</u>: L'espressione alla sinistra dell'uguale viene detta *primo membro*, mentre l'espressione alla destra *secondo membro*:

$$\underbrace{2x - 3}_{1° \text{ membro}} = \underbrace{4x - 6}_{2° \text{ membro}}$$

I monomi di grado zero vengono detti *termini noti*.

Risolvere l'equazione vuol dire trovare quel valore dell'incognita che rende vera l'uguaglianza. Tale valore si dirà soluzione dell'equazione.

Verificare l'equazione vuol dire sostituire all'incognita la soluzione trovata e constatare se essa si trasforma in un'uguaglianza fra numeri.

Per determinare le soluzioni di un'equazione è necessario il seguente principio:

2) <u>PRINCIPIO DI EQUIVALENZA</u>: Due equazioni nella stessa incognita si dicono equivalenti se hanno le medesime soluzioni, cioè se tutti valori che rendono vera la prima rendono vera anche la seconda, e viceversa.

es. : $x + 2 = 5$ e $7x = 21$

è facilmente verificabile a mente che sono vere per $x = 3$, pur avendo forma diversa.

Cominciamo allora a risolvere una equazione.

Sia data la seguente:

$$2x - 3 = 5$$

I due membri sono due polinomi irriducibili, e quindi in essi non si può fare nessun calcolo. Abbiamo bisogno di nuove regole.

3) <u>PRINCIPIO DI ADDIZIONE O SOTTRAZIONE</u>: Se ad ambo i membri di una equazione si aggiunge o si toglie uno stesso numero o una stessa espressione algebrica si ottiene un'equazione equivalente alla data.

es. : $$2x - 3 = 5$$

è equivalente a

$$2x - 3 + 3 = 5 + 3$$

Diretta conseguenza di questo è il seguente :

4) <u>PRINCIPIO DEL TRASPORTO</u>: Se in un'equazione si trasporta un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno, si ottiene un'equazione equivalente alla data.

Infatti se eseguiamo i calcoli a primo membro del precedente esempio otteniamo:

$$2x = 5 + 3$$

si può notare come alla fine il risultato di tutto sia stato il semplice trasporto del termine ma con segno cambiato.

Tenendo presente che il nostro scopo è di ricavare il valore dell'incognita è utile trasportare sempre i termini contenenti l'incognita a primo membro e i numeri (detti termini noti) a secondo membro.

Poiché vi sono ancora dei calcoli che possiamo eseguire otteniamo:

$$2x = +8$$

Siamo ancora fermi (anche se intuitivamente si potrebbe determinare la soluzione).
Ci viene in aiuto il seguente:

5) **<u>PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE O DIVISIONE</u>**: Se in un'equazione si moltiplicano o si dividono ambo i membri per lo stesso numero (diverso da zero) si ottiene un'equazione equivalente alla data.
Applichiamo questo principio ricordando sempre il nostro scopo finale: ricavare il valore di x. Dividiamo allora ambo i membri per il coefficiente dell'incognita:

$$\frac{2}{2}x = +\frac{8}{2}$$

semplifichiamo ed otteniamo così la soluzione:

$$x = +4$$

Per risolvere un'equazione perciò bisogna, tramite i principi di equivalenza, trasformare l'equazione data in successive equazioni ad essa equivalenti finché si determina un'equazione in cui, praticamente, si legge la sua soluzione; tale soluzione allora sarà anche soluzione dell'equazione data, per il principio di equivalenza.

Per sapere se la soluzione ottenuta è effettivamente anche soluzione dell'equazione data esiste il seguente procedimento:

VERIFICA DELLA SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE: Se si sostituisce la soluzione calcolata nell'equazione data si deve ottenere un'uguaglianza di due numeri.
Verifichiamo che x = 4 è soluzione dell'equazione data:
Sostituendo $2 \cdot 4 - 3 = 5$

eseguendo i calcoli

$$8 - 3 = 5$$

$5 = 5$ SI!

Poiché l'uguaglianza è vera, è vero che 4 è la sua soluzione.

Noi tratteremo solo equazioni numeriche di primo grado e pertanto è utile conoscere le seguenti definizioni:

6) DEFINIZIONE: Un *equazione* è *numerica* quando in essa non compaiono altre lettere esclusa l'incognita.

7) **<u>DEFINIZIONE DI EQUAZIONE RIDOTTA A FORMA NORMALE</u>**: Diremo che un'equazione è ridotta a forma normale quando in essa compare a primo membro un solo termine contenente (con coefficiente non nullo) l'incognita ed un solo termine noto, mentre il secondo membro è uguale a zero.
es. : $3x - 4 = 0$

8) <u>DEFINIZIONE DEL GRADO DI UN'EQUAZIONE</u>: Diremo grado di una equazione ridotta a forma normale il grado del polinomio che compare al primo membro, cioè massimo esponente con cui compare l'incognita.

es. : $3x - 4 = 0$: EQ. DI PRIMO GRADO
$2x - 3x^2 + 6 = 0$: EQ. DI SECONDO GRADO
$6x^3 - 2x = 0$: EQ. DI TERZO GRADO

e l'equazione $5 = 0$?

Poiché abbiamo già trovato che un numero è un polinomio di grado zero anche la precedente equazione avrà grado zero.

<u>TEOREMA</u>: Un'equazione di primo grado ammette una ed una sola soluzione.

Esempio svolto:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x-3-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x-4$$

conviene, innanzitutto, ridurre tutto allo stesso denominatore
comune: (lo stesso per i due membri)

$$\frac{6+9x-36-8x}{12}=\frac{3+6x-48}{12}$$

dopo aver eseguito i calcoli ai numeratori applichiamo il principio di moltiplicazione e moltiplichiamo ambo i membri per il numero che compare a denominatore:

$$12\cdot\frac{x-30}{12}=\frac{6x-45}{12}\cdot 12$$

in tal modo possiamo liberare l'equazione dai denominatori:
(semplificando)

$$x - 30 = 6x - 45$$

possiamo ora, applicando il principio del trasporto, portare tutti i termini con l'incognita a primo membro ed i termini noti a secondo, (attenzione ai cambiamenti di segno):

$$x - 6x = +30 - 45$$

eseguiamo ancora i calcoli:

$$- 5x = - 15$$

applicando ancora il principio di divisione, dividiamo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita (in questo caso -5):

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-15}{-5}$$

semplifichiamo opportunamente ed otteniamo :

$$x = + 3$$

che è soluzione anche dell'equazione di partenza poiché è stata ottenuta tramite principi di equivalenza.

CASI PARTICOLARI CHE SI POSSONO VERIFICARE

Risolvendo alcune equazioni si possono verificare i seguenti casi:

1) In un'equazione ridotta a forma normale viene a mancare il termine noto:

es: $5x = 0$

applicando i principio di divisione:

$$\frac{5x}{5} = \frac{0}{5}$$

si ottiene $x = 0$

A ben vedere non è un vero e proprio caso particolare. Questa è un’equazione di primo grado, e come tale ammette una e una sola soluzione. Il numero zero è la soluzione che si calcola e nulla più !

2) In un'equazione ridotta a forma normale viene a mancare il termine contenente l'incognita, si ha così un'equazione di grado zero.

Si possono avere due diverse situazioni:

a) il termine noto è un numero diverso da zero:

es.: $2 = 0$

tale uguaglianza è falsa. Non vi è modo di renderla vera, cioè non esiste nessun valore attribuibile all'incognita che la possa far diventare vera.
L'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto.

INSIEME DI VARIABILITA`	INSIEME DELLE SOLUZIONI
$\Re$ (insieme dei numeri Reali)	$\varnothing$ (insieme vuoto)

<u>Sinteticamente si dice che l'equazione è ***impossibile***.</u>

b) il termine noto è zero:

es.: $0 = 0$

tale uguaglianza è sempre vera per qualsiasi valore si attribuisca all'incognita.
L'insieme delle soluzioni coincide con l'insieme di variabilità.

INSIEME DI VARIABILITA`	INSIEME DELLE SOLUZIONI
$\Re$ (insieme dei numeri Reali)	$\Re$ (insieme dei numeri Reali)

<u>Sinteticamente si dice che l'equazione è ***indeterminata***.</u>